RESOLUCION DE TRIANGULOS

UN CAPITULO DE TRIGONOMETRIA PLANA

RESOLUCION DE TRIANGULOS

POR

JOSE FABIO GARNIER

1929

SAN JOSE DE COSTA RICA

IMPRENTA Y LIBRERIA TREJOS HNOS.

Esta Monografía contiene el Capítulo Sétimo de la obra TRIGONOMETRÍA PLANA del mismo autor que ha de ser publicada en breve.

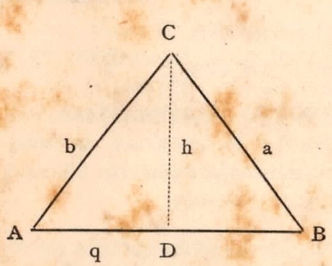
1.—Resolver un triángulo es determinar sus elementos desconocidos.

Un triángulo puede ser resuelto cuando de sus seis elementos—tres lados y tres ángulos—se conocen tres.

Se acostumbra indicar el lado y el ángulo opuestos con la misma letra: el lado *a* es opuesto al ángulo *A* o alfa; el lado *b* es opuesto al ángulo *B* o beta, y el lado *c* es opuesto al ángulo *C* o gamma. En los triángulos rectángulos se llama *c* la hipotenusa, y en consecuencia, al ángulo recto corresponde la designación *C* o gamma.

Por dificultades tipográficas, en la presente monografía se hace uso de las letras mayúsculas A, B y C en vez de las correspondientes letras griegas, alfa, beta y gamma, para la designación de los ángulos.

2.—Dos son, en Trigonometría, los únicos teoremas que es preciso conocer para la solución de cualquier triángulo: el teorema de los senos y el teorema de los cosenos.



3.—*Teorema de los senos.*—En el triángulo oblicuángulo A C B, si bajamos la altura C D desde uno cualquiera de los vértices, obtenemos:

$$h = a \text{ sen } B$$
$$h = b \text{ sen } A$$

igualando esos dos valores

$$a \text{ sen } B = b \text{ sen } A$$

recordando que el primer miembro de esa igualdad puede considerarse como el producto de extremos de una proporción y el segundo miembro como el producto de los medios de la misma proporción, podemos escribir esa proporción:

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{sen } A}{\text{sen } B}$$

expresión que puede enunciarse así: *los lados de un triángulo están entre sí como los senos de los ángulos opuestos a esos lados.*

4.—*Teorema de los cosenos.*—El teorema general de Pitágoras dice que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,c\,q$$

en la que q es la proyección del lado b sobre el lado c. Observando la figura vemos que $\cos A = \frac{q}{b}$ de la cual se obtiene $q = b \cos A$. Sustituyendo este valor de q en la expresión primera, tenemos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A$$

análogamente, bajando las alturas desde los vértices A y B y haciendo el mismo razonamiento, se obtienen estas otras dos expresiones:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos C$$

El teorema de los cosenos puede enunciarse así: *el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el doble producto de esos lados por el coseno del ángulo que forman.*

5.—Los autores de textos de Trigonometría acostumbran clasificar, en ocho distintos, los casos de resolución de triángulos que pueden presentarse. Esos ocho casos son los siguientes:

I. *Triángulos rectángulos:*

1.°—Conocidos la hipotenusa y un cateto, encontrar el otro cateto y los dos ángulos oblícuos.

2.°—Conocidos los dos catetos, determinar la hipotenusa y los dos ángulos oblícuos.

3.°—Conocidos la hipotenusa y un ángulo oblícuo, encontrar los dos catetos y el otro ángulo oblícuo.

4.°—Conocidos un cateto y el ángulo opuesto, determinar la hipotenusa, el otro cateto y el otro ángulo oblícuo.

II. *Triángulos oblicuángulos:*

5.°—Conocidos un lado y dos ángulos, encontrar los otros dos lados y el ángulo no conocido.

6°.—Conocidos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, determinar el otro lado y los ángulos no conocidos.

7.°—Conocidos dos lados y el ángulo comprendido, encontrar el otro lado y los ángulos no conocidos.

8.°—Conocidos los tres lados, determinar los tres ángulos.

Si analizamos, podemos observar que los casos segundo y sétimo son uno mismo.

6.—Los ocho casos citados pueden reducirse a dos solamente:

I. Cuando entre los datos se encuentran un lado y el respectivo ángulo opuesto.

II. Cuando no se verifica la condición anterior.

Quedarían así incluídos en mi primer caso los casos 3.°, 4.°, 5.° y 6.° de los expositores corrientes, y para mi segundo caso quedarían los casos 1.°, 2.°, 7.° y 8.°

7.—*El caso primero* se resuelve aplicando el teorema de los senos.

Ejemplo 1.° Resolver el triángulo rectángulo cuya *hipotenusa* c = 6,57 *y cuyo ángulo* A *mide* 6^0 o' 10". (Caso tercero de los expositores corrientes).

Aplicando el teorema de los senos y recordando que C vale 90^0.

$$\frac{\text{sen } A}{\text{sen } C} = \frac{a}{c}$$

$$\frac{\text{sen } 6^0\ 0'\ 10''}{\text{sen } 90^0} = \frac{a}{6{,}57}$$

de donde se obtiene, observando que sen $90^0 = 1$,

$$a = 6.57 \text{ sen } 6^0\ 0'\ 10''$$

$$\log a = \log 6{,}57 + \log \text{sen } 6^0\ 0'\ 10''$$

$$\log a = 0{,}81757 + 9.01943$$

$$\log a = 9{,}83700$$

$$a = 0{,}687$$

El cateto *b* resulta de la aplicación inmediata del teorema de Pitágoras:

$$b^2 = c^2 - a^2$$

$$b^2 = 6{,}57^2 - 0{,}687^2$$

$$b^2 = 43{,}1649 - 0{,}471969$$

$$b^2 = 42{,}692931$$

$$2 \log b = \log 42{,}692931$$

$$2 \log b = 1{,}63036$$

$$\log b = 0{,}81518$$

$$b = 6{,}534$$

El ángulo B se obtiene de la expresión

$$A + B = 90^0$$

$$B = 90^0 - A$$

$$B = 90^0 - 6^0\ 0'\ 10''$$

$$B = 83^0\ 59'\ 50''$$

Ejemplo 2.º Resolver el triángulo rectángulo cuyo cateto a *vale 5 metros y cuyo ángulo* A *tiene 30 grados.* (Caso cuarto de los expositores corrientes).

El teorema de los senos dice:

$$\frac{a}{c} = \frac{\text{sen } A}{\text{sen } C}$$

como $C = 90^\circ$, sen $C = 1$

$$\frac{5}{c} = \frac{\text{sen } 30^\circ}{1}$$

de donde $$c = \frac{5}{\text{sen } 30^\circ}$$

$$\log c = \log 5 - \log \text{sen } 30^\circ$$
$$\log c = 0{,}69897 - 9{,}69897$$
$$\log c = 1{,}00000$$
$$c = 10$$

El cateto *b* se obtiene aplicando el teorema de Pitágoras:

$$b^2 = c^2 - a^2$$
$$b^2 = 10^2 - 5^2$$
$$b^2 = 100 - 25 = 75$$
$$b = \sqrt{75}$$
$$b = 8{,}66$$

Finalmente el ángulo B se obtiene recordando que:

$$A + B = 90^\circ$$

de donde $$B = 90 - A$$
$$B = 90^\circ - 30^\circ$$
$$B = 60^\circ$$

Ejemplo 3.° Resolver el triángulo oblicuángulo cuyos datos son: $a = 13$, $A = 53^\circ\ 7'\ 49''$, $B = 59^\circ\ 29'\ 23''$. (Caso quinto de los expositores corrientes).

Aplicando el teorema de los senos, tenemos:

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{sen } A}{\text{sen } B}$$

$$\frac{13}{b} = \frac{\text{sen } 53^\circ\ 7'\ 49''}{\text{sen } 59^\circ\ 29'\ 23''}$$

de donde

$$b = \frac{13 \text{ sen } 59^0\ 29'\ 23''}{\text{sen } 53^0\ 7'\ 49''}$$

$$\log b = \log 13 + \log \text{sen } 59^0\ 29'\ 23'' - \log \text{sen } 53^0\ 7'\ 49'$$
$$\log b = 1{,}11394 + 9{,}93528 - 9{,}90309$$
$$\log b = 1{,}14613$$
$$b = 14$$

Para obtener C basta recordar que

$$A + B + C = 180^0$$

de donde
$$C = 180^0 - A - B$$
$$C = 180^\circ - 53^0\ 7'\ 49'' - 59^0\ 29'\ 23''$$
$$C = 180^0 - 112^0\ 37'\ 12''$$
$$C = 67^\circ\ 22'\ 48''$$

Volviendo a aplicar el teorema de los senos:

$$\frac{a}{c} = \frac{\text{sen } A}{\text{sen } C}$$

$$\frac{13}{c} = \frac{\text{sen } 53^0\ 7'\ 49''}{\text{sen } 67^\circ\ 22'\ 48''}$$

de donde

$$c = \frac{13 \text{ sen } 67^0\ 22'\ 48''}{\text{sen } 53^\circ\ 7'\ 49''}$$

$$\log c = \log 13 + \log \text{sen } 67^\circ\ 22'\ 48'' - \log \text{sen } 53^\circ\ 7'\ 49''$$
$$\log c = 1{,}11394 + 9{,}96524 - 9{,}90309$$
$$\log c = 1{,}17609$$
$$c = 15$$

Ejemplo 4.⁰ Resolver el triángulo oblicuángulo cuyos datos son: $a = 37$, $b = 15$, $B = 18^\circ\ 55'\ 29''$. (Caso sexto de los expositores corrientes).

Aplicando el teorema de los senos:

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{sen } A}{\text{sen } B}$$

$$\frac{37}{15} = \frac{\text{sen A}}{\text{sen } 18^0\ 55'\ 29''}$$

de donde

$$\text{sen A} = \frac{37 \text{ sen } 18^0\ 55'\ 29''}{15}$$

$$\log \text{sen A} = \log 37 + \log \text{sen } 18^0\ 55'\ 29'' - \log 15$$
$$\log \text{sen A} = 1{,}56820 + 9{,}51098 - 1{,}17609$$
$$\log \text{sen A} = 9{,}90309$$
$$A = 53^0\ 7'\ 48''$$

El ángulo C se obtiene recordando que

$$A + B + C = 180^0$$
$$C = 180^0 - A - B$$
$$C = 180^0 - 53^0\ 7'\ 48'' - 18^0\ 55'\ 29''$$
$$C = 180^0 - 72^0\ 3'\ 17''$$
$$C = 107^0\ 56'\ 43''$$

Aplicando de nuevo el teorema de los senos:

$$\frac{a}{c} = \frac{\text{sen A}}{\text{sen C}}$$

$$\frac{37}{c} = \frac{\text{sen } 53^0\ 7'\ 48''}{\text{sen } 107^0\ 56'\ 43''}$$

de donde

$$c = \frac{37 \text{ sen } 107^0\ 56'\ 43''}{\text{sen } 53^0\ 7'\ 48''}$$

$$\log c = \log 37 + \log \text{sen } 107^0\ 56'\ 43'' - \log \text{sen } 53^0\ 7'\ 48''$$
$$\log c = 1{,}56820 + 9{,}97834 - 9{,}90309$$
$$\log c = 1{,}64345$$
$$c = 44$$

8.—El *caso segundo* se resuelve aplicando el teorema de los cosenos.

Ejemplo 5.º Resolver un triángulo rectángulo conociendo su hipotenusa, c $= 293$, *y uno de los catetos,* a $= 68$. (Caso primero de los expositores corrientes).

Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$b^2 = c^2 - a^2$$
$$b^2 = 85849 - 4624$$
$$b^2 = 81225$$
$$2 \log b = \log 81225$$
$$\log b = \frac{\log 81225}{2}$$
$$\log b = \frac{4{,}90969}{2}$$
$$\log b = 2{,}45484$$
$$b = 285$$

Aplicando ahora el teorema de los cosenos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\ bc \cos A$$

de la anterior expresión se obtiene fácilmente:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\ bc}$$

$$\cos A = \frac{81225 + 85849 - 4624}{2 \times 285 \times 293}$$

$$\cos A = \frac{162450}{167010}$$

$$\log \cos A = \log 162450 - \log 167010$$
$$\log \cos A = 5{,}21072 - 5{,}22274$$
$$\log \cos A = 9{,}98798$$
$$A = 13^\circ\ 25'$$

Volviendo a aplicar el teorema de los cosenos para obtener el ángulo B, tenemos:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\ ac}$$

$$\cos B = \frac{4624 + 85849 - 81225}{2 \times 68 \times 293}$$

$$\cos B = \frac{9248}{39848}$$

$$\log \cos B = \log 9248 - \log 39848$$
$$\log \cos B = 3{,}96605 - 4{,}60041$$
$$\log \cos B = 9{,}36564$$
$$B = 76^{\circ}\ 35'$$

Este ángulo B podría también obtenerse recordando que $A + B = 90^{0}$, de donde $B = 90^{\circ} - 13^{0}25'$

$$B = 76^{\circ}\ 35'$$

El ángulo C, por el enunciado mismo del problema, vale $90.^{0}$

Ejemplo 6.º Resolver el triángulo rectángulo cuyos catetos son $a = 207$, *y* $b = 224$. (Caso segundo de los expositores corrientes).

La hipotenusa c puede obtenerse por medio del teorema de Pitágoras.

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c^2 = 207^2 + 224^2$$
$$c^2 = 42849 + 50176$$
$$c^2 = 93025$$

$$2 \log c = \log 93025$$

$$\log c = \frac{\log 93025}{2}$$

$$\log c = \frac{4{,}96860}{2}$$

$$\log c = 2{,}48430$$
$$c = 305$$

Aplicando ahora el teorema de los cosenos:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos A = \frac{50176 + 93025 - 42849}{2 \times 224 \times 305}$$

$$\cos A = \frac{100352}{136640}$$

$$\log \cos A = \log 100352 - \log 136640$$
$$\log \cos A = 5{,}00152 - 5{,}13558$$
$$\log \cos A = 9{,}86594$$
$$A = 85^0\ 47'\ 18''$$

El ángulo B lo obtendríamos recordando que

$$A + B = 90^0$$
$$B = 90^0 - A$$
$$B = 90^0 - 85^0\ 47'\ 18''$$
$$B = 4^0\ 12'\ 42''$$

Ejemplo 7.º Resolver el triángulo oblicuángulo conociendo a = 13, b = 20.º y C = 75^0 45' 0". (Caso sétimo de los expositores corrientes).

Aplicando el teorema de los cosenos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\ ab \cos C$$
$$c^2 = 169 + 400 - 2 \times 13 \times 20 \cos 75^\circ\ 45'$$
$$c^2 = 569 - 520 \cos 75^\circ\ 45'$$
$$c^2 = 569 - 520 \times 0{,}24615$$
$$c^2 = 569 - 128$$
$$c^2 = 441$$
$$2 \log c = \log 441$$
$$2 \log c = 2{,}64444$$
$$\log c = 1{,}32222$$
$$c = 21$$

Para obtener cualquiera de los dos ángulos A y B aún no conocidos, podríamos ahora seguir dos caminos distintos: o aplicar de nuevo el teorema de los cosenos, o hacer uso del teorema de los senos. Como ejercicio, vamos a obtener A por medio del teorema de los cosenos, y buscaremos enseguida el valor de B, usando el principio de los senos.

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\ bc}$$

$$\cos A = \frac{400 + 441 - 169}{2 \times 20 \times 21}$$

$$\cos A = \frac{672}{840}$$

$$\log \cos A = \log 672 - \log 840$$
$$\log \cos A = 2{,}82737 - 2{,}92428$$
$$\log \cos A = 9{,}90309$$
$$A = 36^0\ 52'\ 12''$$

El ángulo B, que aún no se conoce, podría obtenerse recordando que:

$$A + B + C = 180^0$$
$$B = 180^0 - A - C$$
$$B = 180^0 - 36^0\ 52'\ 12 - 75^0\ 45'\ 0''$$
$$B = 67^0\ 22'\ 48''$$

Esto puede comprobarse usando el teorema de los senos:

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{sen } A}{\text{sen } B}$$

$$\frac{13}{20} = \frac{\text{sen } 36^0\ 52'\ 12''}{\text{sen } B}$$

de donde

$$\text{sen } B = \frac{20 \text{ sen } 36^0\ 52'\ 12''}{13}$$

$\log \operatorname{sen} B = \log 20 + \log \operatorname{sen} 36^\circ\ 52'\ 12'' - \log 13$
$\log \operatorname{sen} B = 1{,}30103 + 9{,}77815 - 1{,}11394$
$\log \operatorname{sen} B = 9{,}96524$
$B = 67^0\ 22'\ 48''$

Ejemplo 8.° Resolver el triángulo oblicuángulo cuyos lados son a = 13, b = 14, c = 15. (Caso octavo de los expositores corrientes).

Aplicando el teorema de los cosenos:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\ bc}$$

$$\cos A = \frac{196 + 225 - 169}{2 \times 14 \times 15}$$

$$\cos A = \frac{252}{420}$$

$\log \cos A = \log 252 - \log 420$
$\log \cos A = 2{,}40140 - 2{,}62325$
$\log \cos A = 9{,}77815$
$A = 53^0\ 7'\ 49''$

Aplicando, de nuevo, el mismo teorema de los cosenos:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\ ac}$$

$$\cos B = \frac{169 + 225 - 196}{2 \times 13 \times 15}$$

$$\cos B = \frac{198}{390}$$

$\log \cos B = \log 198 - \log 390$
$\log \cos B = 2{,}29667 - 2{,}59106$
$\log \cos B = 9{,}70561$
$B = 59^\circ\ 29'\ 22''$

El ángulo C se obtiene recordando que

$$A + B + C = 180$$

de donde $C = 180 - A - B$

$$C = 180 - 53^0\ 7'\ 49'' - 59^0\ 29'\ 22''$$
$$C = 180 - 112^0\ 37'\ 11''$$
$$C = 67^o\ 22'\ 49''$$

9.—Las áreas de los triángulos se calculan de la manera siguiente:

Si se conocen dos lados y el ángulo comprendido:

$$S = \frac{ch}{2}$$

En el triángulo rectángulo ACD tenemos:

$$\text{sen } A = \frac{h}{b}$$

de donde $h = b\text{sen } A$

sustituyendo este valor de *h* en la fórmula que da la superficie S, obtenemos:

$$S = \frac{bc\text{sen } A}{2}$$

en idéntica forma obtendríamos estas dos expresiones:

$$S = \frac{ac\text{sen } B}{2} \qquad S = \frac{ab\text{sen } C}{2}$$

Si el triángulo es rectángulo, o sea, si C vale 90° y su seno es, en consecuencia, igual a la unidad, quedaría la fórmula reducida a la conocida en Geometría elemental

$$S = \frac{a\ b}{2}$$

10.—Si se conocen un lado y los dos ángulos adyacentes: El teorema de los senos dice:

$$\frac{a}{c} = \frac{\text{sen } A}{\text{sen } C} \quad \text{de donde } a = \frac{c\,\text{sen } A}{\text{sen } C}$$

sustituyendo este valor de *a* en la fórmula anteriormente obtenida para la S:

$$S = \frac{ac\,\text{sen } B}{2} \qquad S = \frac{c^2 \text{ sen } A \text{ sen } B}{\text{sen } C}$$

De idéntica manera se obtendrían las siguientes fórmulas:

$$S = \frac{a^2 \text{ sen } B \text{ sen } C}{\text{sen } A} \qquad S = \frac{b^2 \text{ sen } A \text{ sen } C}{\text{sen } B}$$

Si el triángulo es rectángulo, las fórmulas quedarían modificadas así:

$$S = \frac{a^2 \text{ sen } B}{\text{sen } A} \qquad S = \frac{b^2 \text{ sen } A}{\text{sen } B}$$

$$S = c^2 \text{ sen } A \text{ sen } B$$

debido a que el seno de C es igual a la unidad.

11. Si se conocen los tres lados: La fórmula obtenida en el párrafo 9:

$$S = \frac{bc\,\text{sen } A}{2}$$

puede escribirse así: $S = bc \text{ sen } \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$, transformación que se explica así:

$$\text{sen } A = \text{sen } \left(\frac{A}{2} + \frac{A}{2}\right) = 2 \text{ sen } \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$$

$$\frac{1}{2} bc \text{ sen } A = \frac{1}{2} bc \; 2 \text{ sen } \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$$

$$\frac{1}{2} bc \text{ sen } A = bc \text{ sen } \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$$

$$S = bc \text{ sen } \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$$

Del estudio de las funciones de la mitad de un ángulo sabemos que:

$$2 \operatorname{sen}^2 \frac{A}{2} = 1 - \cos A$$

sustituyendo en esa fórmula el valor de cos A dado por el teorema de los cosenos:

$$2 \operatorname{sen}^2 \frac{A}{2} = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\ bc}$$

$$2 \operatorname{sen}^2 \frac{A}{2} = \frac{2\ bc - b^2 - c^2 + a^2}{2\ bc}$$

$$2 \operatorname{sen}^2 \frac{A}{2} = \frac{(a - b + c)\ (a + b - c)}{2\ bc}$$

llamando el perímetro del triángulo 2 s, resultará:

$$a - b + c = 2\ (s - b)$$
$$a + b - c = 2\ (s - c)$$

sustituyendo estos valores en la última fórmula que nos da $2 \operatorname{sen}^2 \frac{A}{2}$ obtenemos:

$$2 \operatorname{sen}^2 \frac{A}{2} = \frac{2\ (s - b)\ 2\ (s - c)}{2\ bc}$$

$$2 \operatorname{sen}^2 \frac{A}{2} = \frac{4\ (s - b)\ (s - c)}{2\ bc}$$

$$\operatorname{sen}^2 \frac{A}{2} = \frac{(s - b)\ (s - c)}{bc}$$

$$\operatorname{sen} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s - b)\ (s - c)}{bc}}$$

De idéntica manera se obtiene:

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s\ (s - a)}{bc}}$$

sustituyendo estos dos valores en la fórmula que nos daba

$$S = bc \operatorname{sen} \tfrac{A}{2} \cos \tfrac{A}{2}$$

obtenemos
$$S = bc\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

que, por una sencilla transformación, puede escribirse así:

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

12.—Resumiendo: Las fórmulas para averiguar la superficie de un triángulo oblicuángulo son:

a) Si se conocen dos lados y el ángulo comprendido:

datos			fórmula correspondiente
a	c	B	$S = \frac{ac \operatorname{sen} B}{2}$
a	b	C	$S = \frac{ab \operatorname{sen} C}{2}$
b	c	A	$S = \frac{bc \operatorname{sen} A}{2}$

La superficie del triángulo es igual al semiproducto de dos lados por el seno del ángulo comprendido.

b) Si se conocen un lado y los dos ángulos adyacentes:

datos			fórmula correspondiente
c	A	B	$S = \frac{c^2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C}$
a	B	C	$S = \frac{a^2 \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$
b	A	C	$S = \frac{b^2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B}$

La superficie del triángulo es igual al cuadrado de un lado por el producto de los senos de los ángulos adyacentes dividido por el seno del ángulo opuesto al lado considerado.

c) Si se conocen los tres lados:

$$S = \sqrt{s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)}$$

La superficie de un triángulo es igual a la raíz cuadrada del semiperímetro multiplicado por las diferencias existentes entre ese semiperímetro y cada uno de los lados.

13.—*Ejercicio 1.° Cuál es la superficie del triángulo cuyos elementos conocidos son:* $a = 3$, $b = 25$, y $C = 106^\circ\ 15'\ 37''$

$$S = \frac{ab\,\text{sen}\ C}{2}$$

$$S = \frac{3 \times 25 \times \text{sen}\ 106^\circ\ 15'\ 37''}{2}$$

$$\log S = \log 3 + \log 25 + \log \text{sen}\ 106^\circ\ 15'\ 37'' - \log 2$$
$$\log S = 0{,}47712 + 1{,}39794 + 9{,}98227 - 0{,}30103$$
$$\log S = 1{,}55630$$
$$S = 36$$

Ejercicio 2.° Determinar la superficie del triángulo cuyos elementos conocidos son: $a = 9$, $B = 53^\circ\ 7'\ 48''$, $C = 120^\circ\ 30'\ 37''$

$$S = \frac{a^2\ \text{sen}\ B\ \text{sen}\ C}{\text{sen}\ A}$$

$$S = \frac{81\ \text{sen}\ 53^\circ\ 7'\ 48''\ \text{sen}\ 120^\circ\ 30'\ 37''}{\text{sen}\ 6^\circ\ 21'\ 35''}$$

$\log S = \log 81 + \log \text{sen } 53^\circ\ 7'\ 48'' + \log \text{sen } 120^\circ\ 30'\ 37'' - \log \text{sen } 6^\circ\ 21'\ 35''$

$\log S = 1{,}90849 + 9{,}90309 + 9{,}93528 - 9{,}04443$

$\log S = 2{,}70243$

$$S = 504$$

Ejercicio 3.° Cuál es la superficie del triángulo llamado de Heron: a = 13, b = 14, c = 15.

$$S = \sqrt{s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)}$$

$$s = \frac{13 + 14 + 15}{2} = \frac{42}{2} = 21$$

$$S = \sqrt{21\,(21 - 13)\,(21 - 14)\,(21 - 15)}.$$

$$S = \sqrt{21 \times 8 \times 7 \times 6}$$

$$\log S = \frac{\log 21 + \log 8 + \log 7 + \log 6}{2}$$

$$\log S = \frac{1{,}32222 + 0{,}90309 + 0{,}84510 + 0{,}77815}{2}$$

$$\log S = \frac{3{,}84856}{2}$$

$\log S = 1{,}92428$ $\qquad\qquad S = 84$

14.—Llenar las casillas que se encuentran en blanco en la siguiente serie de ejercicios.

Número	a	b	c	A	B	C	Superficie
1	12			67°22'48"		90°	
2			21.746	38°21'47"		90°	
3	3		5			90°	
4	4			30°	60°	90°	
5		2	2.8284			90°	
6	112	15				90°	
7	207	224				90°	
8	156		205			90°	
9			6.57	6°0'10"		90°	
10		60			10°23'20"	90°	
11		105		80°12'6"		90°	
12	7				13°4'	90°	
13		9.3		78°56'41"		90°	
14	1000			46°15'10"	40°33'12"		
15		4			17°31'55"	25°8'20"	
16			158	106°46'40"		26°20'6"	
17		25		73°44'23"	9°31'38"		
18	120			43°36'10"		124°58'34"	
19	44444		77777			42°15'16"	
20	3	25			67°22'48"		
21		13	15		53°7'48"		
22	9		70	6°21'35"			
23	10	35				106°15'37"	
24	11		20			112°37'12"	
25	12	55				143°7'48	
Número	a	b	c	A	B	C	Superficie

Número	a	b	c	A	B	C	Superficie
26		14	15	$53^{0}7'49$			
27		51	65	$14^{0}15'0''$			
28	25		52		$30^{0}30'37''$		
29	24,3105	12,9148		$45^{0}18'2''$			
30	16		39		$22^{0}37'12''$		
31		678,9	790,24			$95^{0}23'45,5''$	
32	19,774		28,3327			$112^{0}47'20''$	
33	4000,96			$94^{0}5'18''$	$2^{0}42'42''$		
34		3,67683		$67^{0}21'54''$	$57^{0}48'8''$		
35		82			$51^{0}42'37''$	$109^{0}17'23''$	
36	180			38^{0}		$66^{0}17'$	
37			0,93109	$15^{0}34'9''$		$123^{0}29'46''$	
38			24,637		$38^{0}56'$	$57^{0}25'$	
39	52,1	61,2		$31^{0}26'$			
40		3	2			100^{0}	
41	7.42	3.39			$26^{0}93'0,5''$		
42	2	3	4				
43	5	7	6				
44	10	9	8				
45	5,6	4,3	4,9				
46	0.85	0.92	0.78				
47	3019	6731	4228				
48	4,254		4,536			$37^{0}9'$	
49	13,509	16,470	21,746				
50	53	69					1356
Número	a	b	c	A	B	C	Superficie

602